№6, №7 дәрістік сабақтарға шығаруға арналған практика есептері.

Комплекс айнымалыға байланысты функцияның Тейлор қатары. Лоран қатары. Комплекс айнымалыға байланысты функцияның ерекше нүктелерінің түрлері және оларды анықтау жолдары. Шегерімдер және оларды есептеу.

Есеп №1. Берілген функцияны $\omega = z\sin\frac{\pi\cdot z}{z-a}$ $z_0 = a$ нүктесінде Лоран қатарына жіктеу.

Шешімі. $z-a$ -ны t арқылы белгілейміз, сонда $z = t + a$, олай болса,

$$\omega = (t+a)\sin\frac{\pi(t+a)}{t} = (t+a)\sin\left(\pi + \frac{a}{t}\right) = -(t+a)\sin\frac{a}{t} = -t\sin\frac{a}{t} - a\sin\frac{a}{t}$$

Маклорен қатарының фунциясын қолданамыз:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

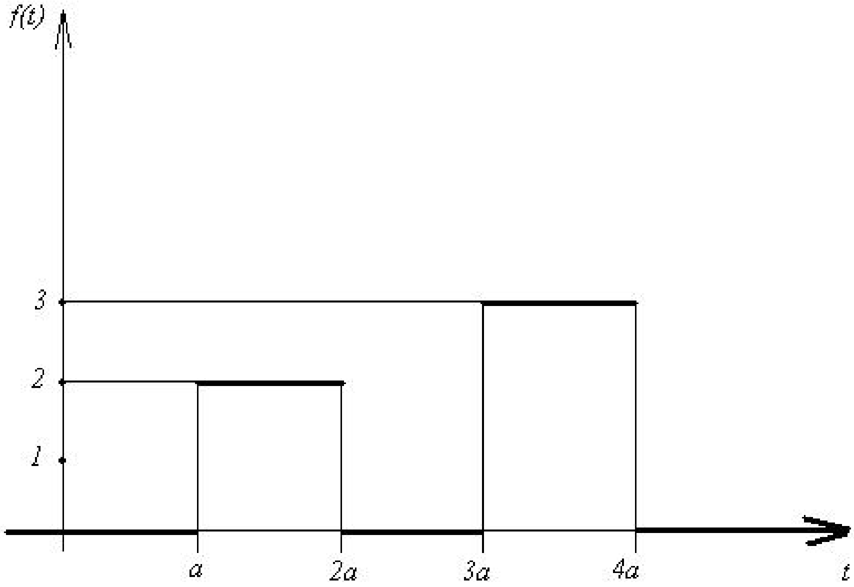
$x = \frac{a}{t}$ үшін $\omega = -t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!} - a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1}(2n+1)!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+1}}{t^{2n}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1}(2n+1)!}$$ аламыз.

Әрі қарай, z айнымалысына қайта ораламыз.

Жауабы: $\omega = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+1}}{(z-a)^{2n}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}$

Есеп №2. $f(z)$ түпнұсқасының берілген графигі бойынша оның өрнегін табу:



Шешімі. Берілген функция (және оның туындысы) келесі нүктелерде үзіледі: $\tau_1 = a, \tau_2 = 2a, \tau_3 = 3a, \tau_4 = 4a$. Осы нүктелерде функцияның секірістері сәйкесінше $a_1 = 2 - 0 = 2, a_2 = 0 - 2 = -2, a_3 = 3 - 0 = 3, a_4 = 0 - 3 = -3$ тең. Туындының секірісі $\beta_k = 0, k = 1,2,3,4$ тең, өйткені барлық нүктелерде $f'(t) = 0$. Ерекшелігі: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$.

Олай болса, $f(t)$ өрнегі келесі түрге ие болады

$$F(p) = \sum_{k=1}^{4} e^{-p\tau_k}\left(\frac{a_k}{p} + \frac{b_k}{p^2}\right) = e^{-pa}\frac{2}{p} - e^{-2pa}\frac{2}{p} + e^{-3pa}\frac{3}{p} - e^{-4pa}\frac{3}{p}.$$

Жауабы: $\dfrac{2e^{-pa} - 2e^{-2pa} + 3e^{-3pa} - 3e^{-4pa}}{p}$.

Есеп №3. Берілген өрнек бойынша түпнұсқаны табу

$$F(p) = \frac{3p - 2}{(p-1)(p^2 - 6p + 10)}$$

Шешімі. Берілген функцияны анықталмаған коэффициенттер әдісі бойынша қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{3p - 2}{(p-1)(p^2 - 6p + 10)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp + C}{p^2 - 6p + 10}$$

$$3p - 2 = A(p^2 - 6p + 10) + (Bp + C)(p - 1),$$

$p = 1 \Rightarrow 1 = A(1 - 6 + 10)$,

$$1 = 5A \Rightarrow A = 0,2 .$$

Табылған A мәнін қойып, дәрежелері бірдей болған жағдайда оң және сол жақтан коэффициенттерді теңестіреміз:

$$3p - 2 = 0{,}2p^2 - 1{,}2p + 2 + Bp^2 - Bp + Cp \ ,$$

$$-2 = 2 - C \ ,$$

$$3 = -1{,}2 - B + C \ .$$

Осыдан алатынымыз: $C = 4, \quad B = -0{,}2$. Сондықтан:

$$F(p) = \frac{0{,}2}{p-1} + \frac{-0{,}2p + 4}{p^2 - 6p + 10} \ .$$

Өрнектен толық квадратты аламыз:

$$p^2 - 6p + 10 = p^2 - 6p + 9 + 1 = (p-3)^2 + 1$$

$F(p)$ -ті келесі түрге келтіреміз:

$$F(p) = \frac{0{,}2}{p-1} + \frac{-0{,}2(p-3) - 0{,}6 + 4}{(p-3)^2 + 1} = \frac{0{,}2}{p-1} - 0{,}2\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{3{,}6}{(p-3)^2+1}$$

Қатынастарды пайдалана отырып алатынымыз:

$$e^{at}\cos\omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

$$e^{at}\sin\omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

Сызықтық қасиеттер бойынша:

$$F(p) \div 0{,}2e^{t} - 0{,}2e^{3t}\cos t + 3{,}6e^{3t}\sin t$$ аламыз.

Жауабы: $0{,}2e^{t} = 0{,}2e^{3t}\cos t + 3{,}6e^{3t}\sin t.$